

Chapitre 5 – Fractions : addition, soustraction, multiplication et division

1 Simplification d'écritures fractionnaires

Propriété :

Le quotient de deux nombres ne change pas si l'on multiplie ou on divise le numérateur ET le dénominateur par un même nombre.

$$\begin{array}{ccc} & b \neq 0 & c \neq 0 \\ & \frac{a}{b} & \frac{a \times c}{b \times c} \qquad \frac{a}{b} & \frac{a \div c}{b \div c} \end{array}$$

Exemples :

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \times 3}{5 \times 3}$$

$$\frac{63}{56} = \frac{63 \div 7}{56 \div 7}$$

Simplifier une fraction revient à écrire une fraction qui lui est égale avec un numérateur et un dénominateur plus petits

Exemple :

$$\frac{81}{27} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 7} = \frac{27}{7}$$

2. Addition et soustraction (Révision)

a) Si les dénominateurs sont identiques on n'ajoute que les numérateurs .

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

b) Si un dénominateur est un multiple de l'autre, on transforme l'une des deux fractions pour obtenir le même dénominateur .

$$D = \frac{5}{2} + \frac{7}{8} = \frac{5 \times 4}{2 \times 4} + \frac{7}{8} = \frac{20}{8} + \frac{7}{8} = \frac{27}{8}$$

c) Dans tous les autres cas, on transforme les deux fractions pour obtenir le même dénominateur (on cherche un dénominateur commun le plus petit possible) .

$$E = \frac{5}{4} + \frac{2}{3} = \frac{5 \times 3}{4 \times 3} + \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{15}{12} + \frac{8}{12} = \frac{23}{12}$$

$$F = \frac{17}{5} - \frac{3}{8} = \frac{17 \times 8}{5 \times 8} - \frac{3 \times 5}{8 \times 5} = \frac{136}{40} - \frac{15}{40} = \frac{121}{40}$$

3. Multiplication

Propriété :

Lors de la multiplication de deux écritures fractionnaires, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux, en appliquant la gestion des signes.

Soit a, b, c, d, quatre nombres tels que :

$$b \neq 0, d \neq 0 : \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Exemple :

$$G = \frac{-3}{5} \times \frac{7}{-2} = \frac{(-3) \times 7}{5 \times (-2)} = \frac{-21}{-10} = \frac{21}{10}$$

4. Notion d'Inverse

Propriété :

Deux nombres sont inverses si leur produit est égal à 1.

Exemples :

$$\frac{1}{2} \times 2 = 1 \qquad -4 \times \frac{1}{-4} = 1$$

Définition :

L'inverse d'un nombre quelconque x non nul est le quotient de 1 par x.

On le note $\frac{1}{x}$.

Exemples :

L'inverse de 2 est $\frac{1}{2}$. L'inverse de 5 est $\frac{1}{5}$.

L'inverse d'une fraction $\frac{a}{b}$ est la fraction $\frac{b}{a}$.

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{a \times b}{b \times a} = \frac{ab}{ab} = 1$$

Exemple :

L'inverse de $\frac{-3}{5}$ est $\frac{5}{-3}$.

L'inverse de $\frac{1}{2}$ est 2 .

5. Division

Propriété :

Diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse.

Soit a et b deux nombres non nuls :

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$$

Soit a,b,c,d quatre nombres non nuls :

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Exemples

$$\frac{5}{8} = 5 \times \left(\frac{1}{8}\right)$$

$$\frac{5}{8} \div \frac{3}{7} = \frac{5}{8} \times \left(\frac{7}{3}\right) = \frac{35}{24}$$

6. Comparaison de fractions

6.1 Comparer des fractions qui ont le même numérateur.

Pour **comparer deux fractions** qui ont le même numérateur, on compare les dénominateurs, la fraction la plus grande est celle qui a le plus petit dénominateur.

Exemple : $\frac{4}{5} > \frac{4}{9}$

6.2 Comparer des fractions qui ont le même dénominateur.

Pour **comparer deux fractions** qui ont le même dénominateur, on compare les numérateurs, la fraction la plus grande est celle qui a le plus grand numérateur.

Exemple : $\frac{3}{4} < \frac{7}{4}$

6.3 Comparer des fractions quelconques.

Pour **comparer des fractions**, quand les numérateurs sont différents et que les dénominateurs sont eux aussi différents, on réduit les fractions au même dénominateur puis on compare les numérateurs.

Exemple : Comparer $\frac{19}{11}$ et $\frac{13}{7}$?

$$\frac{19 \times 7}{11 \times 7} = \frac{209}{77} \quad \frac{13 \times 11}{7 \times 11} = \frac{143}{77}$$

$$\frac{-21}{-10} \text{ donc } \frac{19}{11} > \frac{13}{7}$$

6.4 Comparer une fraction et l'unité.

Une fraction dont :

- le dénominateur est supérieur au numérateur est inférieure à 1.
- le dénominateur est inférieur au numérateur est supérieure à 1.
- le dénominateur est égal au numérateur est égale à 1.

Exemple :

$$\frac{3}{4} < 1$$

$$\frac{7}{4} > 1$$

$$\frac{4}{4} = 1$$

7. Nombres premiers inférieur à 100

Définition :

Un nombre premier est un nombre entier naturel (non nul) qui admet exactement 2 diviseurs distincts : **1 et lui-même.**

Les nombres premiers inférieurs à 100.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

8. Simplification de fraction

Pour simplifier une fraction, il faut dans un premier temps exprimer le numérateur et le dénominateur comme des produits.

Il suffit ensuite de les diviser par leurs facteurs communs.

On dit qu'une fraction est simplifiée lorsque le numérateur et le dénominateur ne possèdent plus de facteur commun (sauf 1)

Exemple

$$\frac{70}{42}$$

70 peut s'écrire: $70 = 7 \times 10$ que l'on peut encore décomposer en nombres premiers $70 = 7 \times 2 \times 5$

42 peut s'écrire: $42 = 6 \times 7$ que l'on peut encore décomposer en $42 = 2 \times 3 \times 7$

Donc on a l'égalité:

$$\frac{70}{42} = \frac{7 \times 2 \times 5}{2 \times 3 \times 7}$$

7 est un facteur commun au numérateur et au dénominateur, on peut donc les diviser par 7:

$$\frac{7 \times 2 \times 5}{2 \times 3 \times 7} = \frac{7 \times 2 \times 5 : 7}{2 \times 3 \times 7 : 7} = \frac{2 \times 5}{2 \times 3}$$

2 est un facteur commun au numérateur et au dénominateur, on peut donc les diviser par 2:

$$\frac{2 \times 5}{2 \times 3} = \frac{2 \times 5 : 2}{2 \times 3 : 2} = \frac{5}{3}$$

$$\text{Donc: } \frac{70}{42} = \frac{5}{3}$$